- [在线搜索]
- |
- [有问题找看雪]

-
- ECC加密算法入门介绍

- 标 题：ECC加密算法入门介绍
- 作 者：zmworm
- 时 间：2003/05/04 08:32pm
- 链 接：http://bbs.pediy.com

ECC加密算法入门介绍

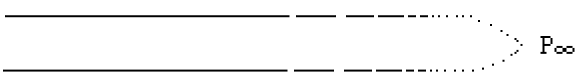
作者 ：ZMWorm[CCG]
E-Mail：zmworm@sohu.com
主页 ：Http://ZMWorm.Yeah.Net/

前言

同RSA（Ron Rivest，Adi Shamir，Len Adleman三位天才的名字）一样，ECC（Elliptic Curves Cryptography，椭圆曲线密码编码学）也属于公开密钥算法。目前，国内详细介绍ECC的公开文献并不多（反正我没有找到）。有一些简介，也是泛泛而谈，看完后依然理解不了ECC的实质（可能我理解力太差）。前些天我从国外网站找到些材料，看完后对ECC似乎懵懂了。于是我想把我对ECC的认识整理一下，与大家分享。当然ECC博大精深，我的认识还很肤浅，文章中错误一定不少，欢迎各路高手批评指正，小弟我洗耳恭听，并及时改正。文章将采用连载的方式，我写好一点就贴出来一点。本文主要侧重理论，代码实现暂不涉及。这就要求你要有一点数学功底。最好你能理解RSA算法，对公开密钥算法有一个了解。《近世代数基础》《初等数论》之类的书，最好您先翻一下，这对您理解本文是有帮助的。别怕，我尽量会把语言通俗些，希望本文能成为学习ECC的敲门砖。

一、从平行线谈起。

平行线，永不相交。没有人怀疑把：）不过到了近代这个结论遭到了质疑。平行线会不会在很远很远的地方相交了？事实上没有人见到过。所以"平行线，永不相交"只是假设（大家想想初中学习的平行公理，是没有证明的）。既然可以假设平行线永不相交，也可以假设平行线在很远很远的地方相交了。即平行线相交于无穷远点P∞（请大家闭上眼睛，想象一下那个无穷远点P∞，P∞是不是很虚幻，其实与其说数学锻炼人的抽象能力，还不如说是锻炼人的想象力）。给个图帮助理解一下：



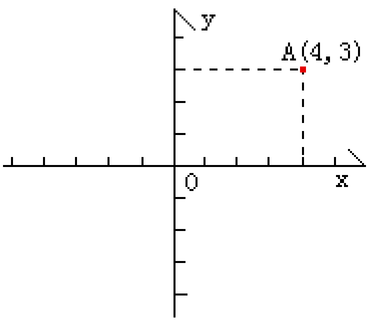
直线上出现P∞点，所带来的好处是所有的直线都相交了，且只有一个交点。这就把直线的平行与相交统一了。为与无穷远点相区别把原来平面上的点叫做平常点。

以下是无穷远点的几个性质。

▲直线L上的无穷远点只能有一个。
（从定义可直接得出）
▲平面上一组相互平行的直线有公共的无穷远点。
（从定义可直接得出）
▲ 平面上任何相交的两直线L1,L2有不同的无穷远点。
（否则L1和L2有公共的无穷远点P，则L1和L2有两个交点A、P，故假设错误。）
▲平面上全体无穷远点构成一条**无穷远直线**。（自己想象一下这条直线吧）
▲平面上全体无穷远点与全体平常点构成**射影平面**。

二、射影平面坐标系

射影平面坐标系是对普通平面直角坐标系（就是我们初中学到的那个笛卡儿平面直角坐标系）的扩展。我们知道普通平面直角坐标系没有为无穷远点设计坐标，不能表示无穷远点。为了表示无穷远点，产生了射影平面坐标系，当然射影平面坐标系同样能很好的表示旧有的平常点（数学也是“向下兼容”的）。



普通平面直角坐标系

我们对普通平面直角坐标系上的点A的坐标（x,y）做如下改造：
令$x=X/Z$，$y=Y/Z$（$Z\neq0$）；则A点可以表示为（X:Y:Z）。
变成了有三个参量的坐标点，这就对平面上的点建立了一个新的坐标体系。

例2.1：求点（1,2）在新的坐标体系下的坐标。
解：$\because X/Z=1$，$Y/Z=2$（$Z\neq0$）$\therefore X=Z$，$Y=2Z$ ∴坐标为（Z:2Z:Z），$Z\neq0$。即（1:2:1）（2:4:2）（1.2:2.4:1.2）等形如（Z:2Z:Z），$Z\neq0$的坐标，都是（1,2）在新的坐标体系下的坐标。

我们也可以得到直线的方程$aX+bY+cZ=0$（想想为什么？提示：普通平面直角坐标系下直线一般方程是$ax+by+c=0$）。新的坐标体系能够表示无穷远点么？那要让我们先想想无穷远点在哪里。根据上一节的知识，我们知道无穷远点是两条平行直线的交点。那么，如何求两条直线的交点坐标？这是初中的知识，就是将两条直线对应的方程联立求解。平行直线的方程是：
$aX+bY+c_1Z=0$；$aX+bY+c_2Z=0$（$c_1\neq c_2$）；
（为什么？提示：可以从斜率考虑，因为平行线斜率相同）；

将二方程联立，求解。有$c_2Z=c_1Z=-(aX+bY)$，$\because c_1\neq c_2$ $\therefore Z=0$ $\therefore aX+bY=0$；

所以无穷远点就是这种形式（X：Y：0）表示。注意，平常点Z≠0，无穷远点Z=0，因此无穷远直线对应的方程是Z=0。

例2.2：求平行线L1：X+2Y+3Z=0 与L2：X+2Y+Z=0 相交的无穷远点。
解：因为L1∥L2 所以有Z=0， X+2Y=0；所以坐标为（-2Y:Y:0），Y≠0。即（-2:1:0）（-4:2:0）（-2.4:1.2:0）等形如（-2Y:Y:0），Y≠0的坐标，都表示这个无穷远点。

看来这个新的坐标体系能够表示射影平面上所有的点，我们就把这个能够表示射影平面上所有点的坐标体系叫做**射影平面坐标系**。

练习：
1、求点A(2,4) 在射影平面坐标系下的坐标。
2、求射影平面坐标系下点(4.5:3:0.5)，在普通平面直角坐标系下的坐标。
3、求直线X+Y+Z=0上无穷远点的坐标。
4、判断：直线aX+bY+cZ=0上的无穷远点 和 无穷远直线与直线aX+bY=0的交点，是否是同一个点？

三、椭圆曲线

上一节，我们建立了射影平面坐标系，这一节我们将在这个坐标系下建立椭圆曲线方程。因为我们知道，坐标中的曲线是可以用方程来表示的（比如：单位圆方程是$x^2+y^2=1$）。椭圆曲线是曲线，自然椭圆曲线也有方程。

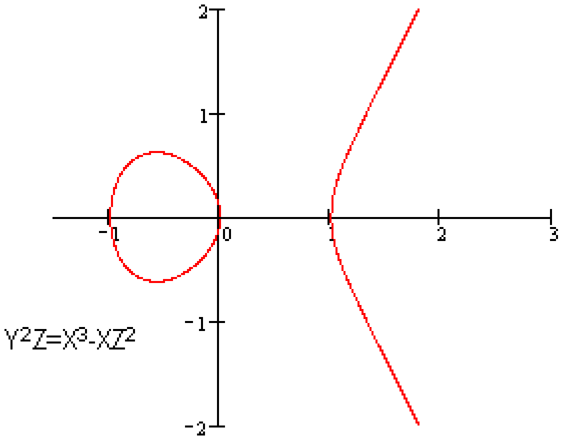
椭圆曲线的定义：
一条椭圆曲线是在射影平面上满足方程
$Y^2Z+a_1XYZ+a_3YZ^2=X^3+a_2X^2Z+a_4XZ^2+a_6Z^3$ ----------------[3-1]
的所有点的集合，且曲线上的每个点都是非奇异（或光滑）的。

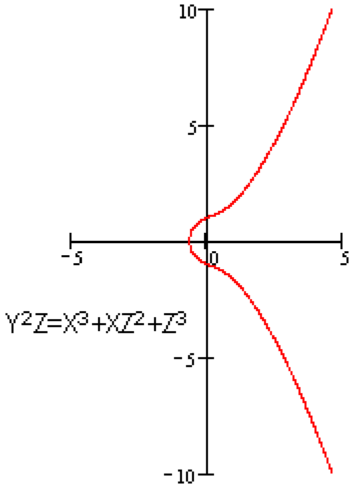
定义详解：

▲ $Y^2Z+a_1XYZ+a_3YZ^2 = X^3+a_2X^2Z+a_4XZ^2+a_6Z^3$是Weierstrass方程（维尔斯特拉斯，Karl Theodor Wilhelm Weierstrass,1815-1897），是一个齐次方程。

▲ 椭圆曲线的形状，并不是椭圆的。只是因为椭圆曲线的描述方程，类似于计算一个椭圆周长的方程（计算椭圆周长的方程，我没有见过，而对椭圆线积分（设密度为1）是求不出来的。谁知道这个方程，请告诉我呀^_^），故得名。

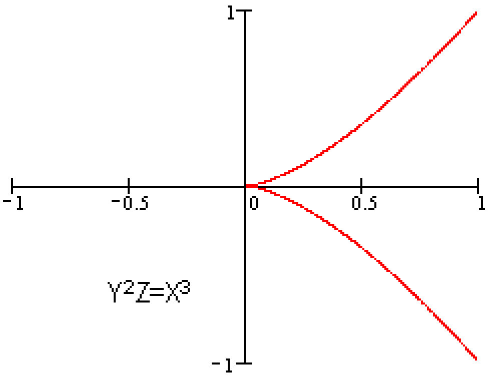
我们来看看椭圆曲线是什么样的。

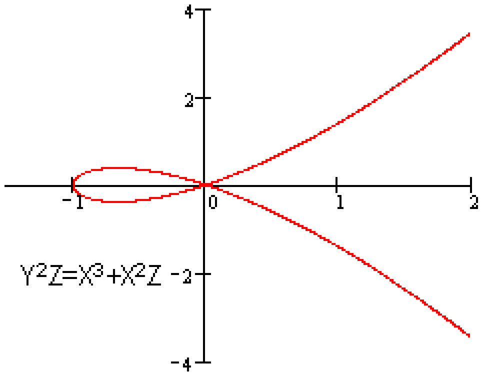




▲ 所谓"非奇异"或"光滑"的，在数学中是指曲线上任意一点的偏导数$F_x(x,y,z)$，$F_y(x,y,z)$，$F_z(x,y,z)$不能同时为0。如果你没有学过高等数学，可以这样理解这个词，即满足方程的任意一点都存在切线。

下面两个方程都不是椭圆曲线，尽管他们是方程[3-1]的形式。





因为他们在（0:0:1）点处（即原点）没有切线。

▲椭圆曲线上有一个无穷远点O∞（0:1:0），因为这个点满足方程[3-1]。

知道了椭圆曲线上的无穷远点。我们就可以把椭圆曲线放到普通平面直角坐标系上了。因为普通平面直角坐标系只比射影平面坐标系少无穷远点。我们在普通平面直角坐标系上，求出椭圆曲线上所有平常点组成的曲线方程，再加上无穷远点O∞（0:1:0），不就构成椭圆曲线了么？

我们设x=X/Z， y=Y/Z代入方程[3-1]得到：
$\mathbf{y^2+a_1xy+a_3y = x^3+a_2x^2+a_4x+a_6}$ **-------------------------[3-2]**

也就是说满足方程[3-2]的光滑曲线加上一个无穷远点O∞，组成了椭圆曲线。为了方便运算，表述，以及理解，今后论述椭圆曲线将主要使用[3-2]的形式。

本节的最后，我们谈一下求椭圆曲线一点的切线斜率问题。
由椭圆曲线的定义可以知道，椭圆曲线是光滑的，所以椭圆曲线上的平常点都有切线。而切线最重要的一个参数就是斜率k。

例3.1：求椭圆曲线方程$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$上，平常点A(x,y)的切线的斜率k。
解：令$F(x,y)= y^2+a_1xy+a_3y-x^3-a_2x^2-a_4x-a_6$
求偏导数
$F_x(x,y)= a_1y-3x^2-2a_2x-a_4$
$F_y(x,y)= 2y+a_1x +a_3$
则导数为：$f'(x)=- F_x(x,y)/ F_y(x,y)=-(a_1y-3x^2-2a_2x-a_4)/(2y+a_1x +a_3)$
$= (3x^2+2a_2x+a_4-a_1y) /(2y+a_1x +a_3)$
所以$k=(3x^2+2a_2x+a_4-a_1y) /(2y+a_1x +a_3)$ ------------------------[3-3]

看不懂解题过程没有关系，记住结论[3-3]就可以了。

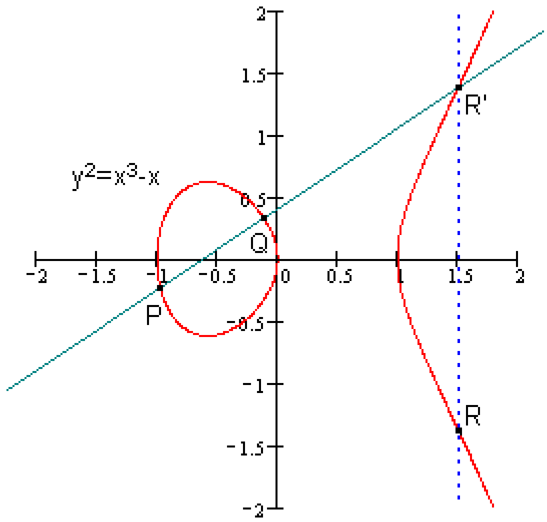
练习：
1、将给出图例的椭圆曲线方程$Y^2Z=X^3-XZ^2$ 和$Y^2Z=X^3+XZ^2+Z^3$转换成普通平面直角坐标系上的方程。

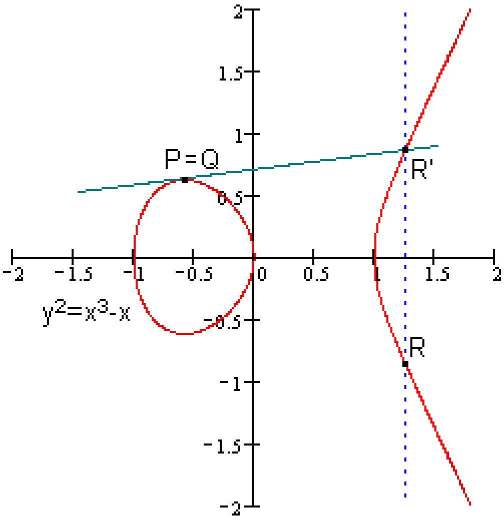
四、椭圆曲线上的加法

上一节，我们已经看到了椭圆曲线的图象，但点与点之间好象没有什么联系。我们能不能建立一个类似于在实数轴上加法的运算法则呢？天才的数学家找到了这一运算法则

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆
自从近世纪代数学引入了群、环、域的概念，使得代数运算达到了高度的统一。比如数学家总结了普通加法的主要特征，提出了加群（也叫交换群，或Abel（阿贝尔）群），在加群的眼中。实数的加法和椭圆曲线的上的加法没有什么区别。这也许就是数学抽象把：）。关于群以及加群的具体概念请参考近世代数方面的数学书。
☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

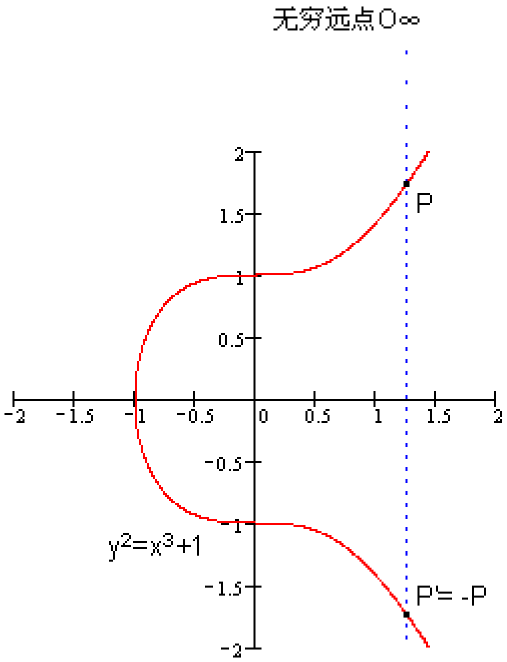
运算法则：任意取椭圆曲线上两点P、Q （若P、Q两点重合，则做P点的切线）做直线交于椭圆曲线的另一点R’，过R’做y轴的平行线交于R。我们规定P+Q=R。（如图）





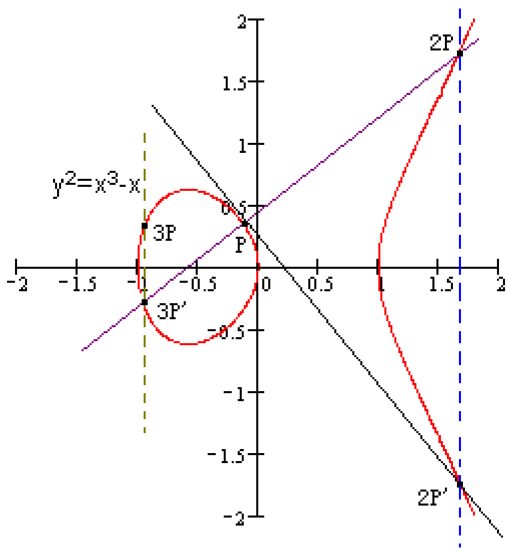
法则详解：
▲这里的+不是实数中普通的加法，而是从普通加法中抽象出来的加法，他具备普通加法的一些性质，但具体的运算法则显然与普通加法不同。

▲根据这个法则，可以知道椭圆曲线无穷远点O∞与椭圆曲线上一点P的连线交于P’，过P’作y轴的平行线交于P，所以有 无穷远点 O∞+ P = P 。这样，无穷远点 O∞的作用与普通加法中零的作用相当（0+2=2），我们把无穷远点 O∞ 称为 **零元**。同时我们把P’称为P的**负元**（简称，负P；记作，-P）。（参见下图）



▲根据这个法则，可以得到如下结论 ：如果椭圆曲线上的三个点A、B、C，处于同一条直线上，那么他们的和等于零元，即A+B+C= O∞

▲k个相同的点P相加，我们记作kP。如下图：P+P+P = 2P+P = 3P。



下面，我们利用P、Q点的坐标(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，求出R=P+Q的坐标(x_4,y_4)。

例4.1：求椭圆曲线方程$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$上，平常点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$的和$R(x_4,y_4)$的坐标。

解：（1）先求点$-R(x_3,y_3)$

因为P,Q,-R三点共线，故设共线方程为y=kx+b,其中

若P≠Q(P,Q两点不重合) 则

直线斜率$k=(y_1-y_2)/(x_1-x_2)$

若P=Q(P,Q两点重合) 则直线为椭圆曲线的切线，故由例3.1可知：

$k=(3x_2+2a_2x+a_4 -a_1y) /(2y+a_1x+a_3)$

因此P,Q,-R三点的坐标值就是方程组:

$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ -----------------[1]

$y=(kx+b)$ -----------------[2]

的解。

将[2]，代入[1] 有

$(kx+b)^2+a_1x(kx+b)+a_3(kx+b) =x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ --------[3]

对[3]化为一般方程，根据三次方程根与系数关系（当三次项系数为1时；$-x_1x_2x_3$ 等于常数项系数，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$等于一次项系数，$-(x_1+x_2+x_3)$等于二次项系数。）

所以$-(x_1+x_2+x_3)=a_2-ka_1-k^2$

$x_3=k^2+ka_1+a_2+x_1+x_2$;---------------------求出点-R的横坐标

因为$k=(y_1-y_3)/(x_1-x_3)$ 故

$y_3=y_1-k(x_1-x_3)$;-------------------------------求出点-R的纵坐标

（2）利用-R求R

显然有 $x_4=x_3= k^2+ka_1+a_2+x_1+x_2$; ------------求出点R的横坐标

而y_3 y_4 为 $x=x_4$时 方程$y^2+a_1xy+a_3y=x_3+a_2x_2+a_4x+a_6$的解

化为一般方程$y^2+(a_1x+a_3)y-(x^3+a_2x^2+a_4x+a_6)=0$, 根据二次方程根与系数关系得：

$-(a_1x+a_3)=y_3+y_4$

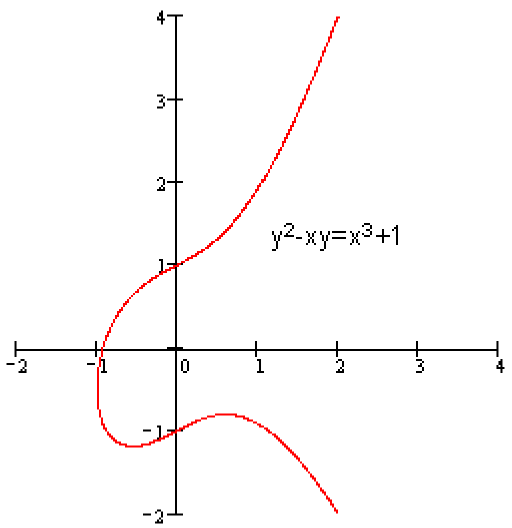
故$y_4=-y_3-(a_1x+a_3)=k(x_1-x_4)-y_1-(a_1x_4+a_3)$; ---------------求出点R的纵坐标

即：

$x_4=k^2+ka_1+a_2+x_1+x_2$;

$y_4=k(x_1-x_4)-y_1-a_1x_4-a_3$;

本节的最后，提醒大家注意一点，以前提供的图像可能会给大家产生一种错觉，即椭圆曲线是关于x轴对称的。事实上，椭圆曲线并不一定关于x轴对称。如下图的$y^2-xy=x^3+1$



五、密码学中的椭圆曲线

我们现在基本上对椭圆曲线有了初步的认识，这是值得高兴的。但请大家注意，前面学到的椭圆曲线是连续的，并不适合用于加密；所以，我们必须把椭圆曲线变成离散的点。

让我们想一想，为什么椭圆曲线为什么连续？是因为椭圆曲线上点的坐标，是实数的（也就是说前

面讲到的椭圆曲线是定义在实数域上的），实数是连续的，导致了曲线的连续。因此，我们要把椭圆曲线定义在有限域上（顾名思义，有限域是一种只有由有限个元素组成的域）。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

域的概念是从我们的有理数，实数的运算中抽象出来的，严格的定义请参考近世代数方面的书。简单的说，域中的元素同有理数一样，有自己得的加法、乘法、除法、单位元(1)，零元(0),并满足交换率、分配率。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

下面，我们给出一个有限域F_p，这个域只有有限个元素。

F_p中只有p（p为素数）个元素0,1,2 …… p-2,p-1；

F_p 的加法（a+b）法则是 $a+b\equiv c \pmod p$；即，(a+c)÷p的余数 和c÷p的余数相同。

F_p 的乘法(a×b)法则是 $a\times b\equiv c \pmod p$；

F_p 的除法(a÷b)法则是 $a/b\equiv c \pmod p$；即 $a\times b^{-1}\equiv c \pmod p$；（$b^{-1}$也是一个0到p-1之间的整数，但满足$b\times b^{-1}\equiv 1 \pmod p$；具体求法可以参考初等数论，或我的另一篇文章）。

F_p 的单位元是1，零元是 0。

同时，并不是所有的椭圆曲线都适合加密。$y^2=x^3+ax+b$是一类可以用来加密的椭圆曲线，也是最为简单的一类。下面我们就把$y^2=x^3+ax+b$ 这条曲线定义在F_p上：

选择两个满足下列条件的小于p(p为素数)的非负整数a、b

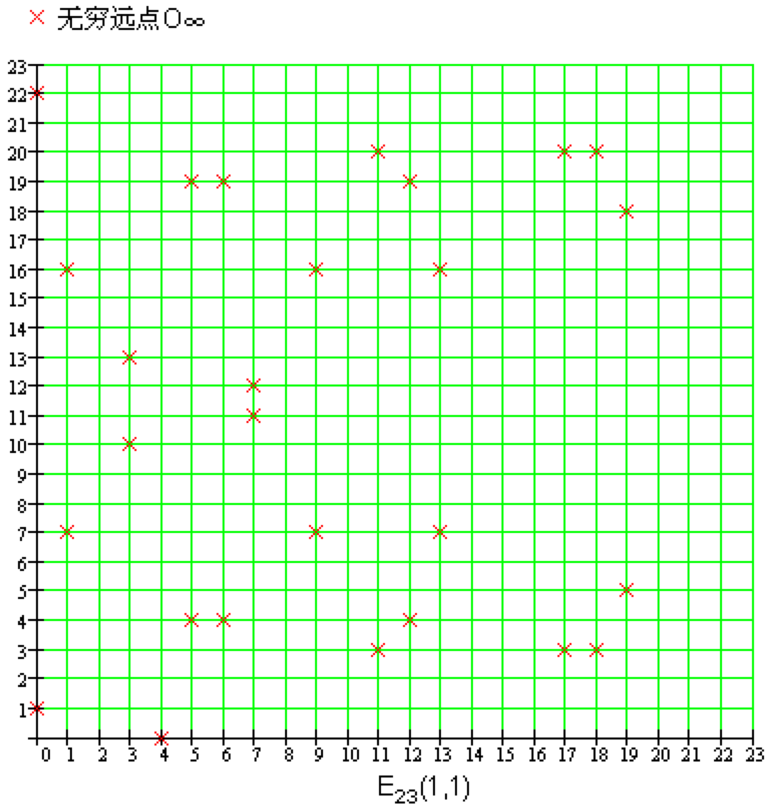
$4a^3+27b^2\neq 0 \pmod p$

则满足下列方程的所有点(x,y)，再加上 无穷远点O∞ ，构成一条椭圆曲线。

$y^2=x^3+ax+b \pmod p$

其中 x,y属于0到p-1间的整数，并将这条椭圆曲线记为Ep(a,b)。

我们看一下$y^2=x^3+x+1 \pmod{23}$的图像



是不是觉得不可思议？椭圆曲线，怎么变成了这般模样，成了一个一个离散的点？

椭圆曲线在不同的数域中会呈现出不同的样子，但其本质仍是一条椭圆曲线。举一个不太恰当的例子，好比是水，在常温下，是液体；到了零下，水就变成冰，成了固体；而温度上升到一百度，水又变成了水蒸气。但其本质仍是H_2O。

F_p上的椭圆曲线同样有加法，但已经不能给以几何意义的解释。不过，加法法则和实数域上的差不多，请读者自行对比。

1 无穷远点 O∞是零元，有O∞+ O∞= O∞，O∞+P=P

2 P(x,y)的负元是 (x,-y)，有P+(-P)= O∞

3 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$的和$R(x_3,y_3)$ 有如下关系：

$x_3 \equiv k^2-x_1-x_2 \pmod p$

$y_3 \equiv k(x_1-x_3)-y_1 \pmod p$

其中若P=Q 则 $k=(3x^2+a)/2y_1$ 若P≠Q，则$k=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$

例5.1 已知E23(1,1)上两点P(3,10)，Q(9,7)，求1)-P，2)P+Q，3) 2P。

解 1) –P的值为(3,-10)

2) k=(7-10)/(9-3)=-1/2，2的乘法逆元为12 因为2*12≡1 (mod 23)

k≡-1*12 (mod 23) 故 k=11。

$x=11^2-3-9=109\equiv 17 \pmod{23}$;

$y=11[3-(-6)]-10=89\equiv 20 \pmod{23}$

故P+Q的坐标为(17,20)

3) $k=[3(3^2)+1]/(2*10)=1/4\equiv 6 \pmod{23}$

$x=6^2-3-3=30\equiv 20 \pmod{23}$

$y=6(3-7)-10=-34\equiv 12 \pmod{23}$

故2P的坐标为(7,12)

最后，我们讲一下椭圆曲线上的点的阶。

如果椭圆曲线上一点P，存在最小的正整数n，使得数乘nP=O∞，则将n称为P的 阶，若n不存在，我们说P是无限阶的。

事实上，在有限域上定义的椭圆曲线上所有的点的阶n都是存在的（证明，请参考近世代数方面的书）

练习:

1 求出$E_{11}(1,6)$上所有的点。

2 已知$E_{11}(1,6)$上一点G(2,7)，求2G到13G所有的值。

六、椭圆曲线上简单的加密/解密

公开密钥算法总是要基于一个数学上的难题。比如RSA 依据的是：给定两个素数p、q 很容易相乘得到n，而对n进行因式分解却相对困难。那椭圆曲线上有什么难题呢？

考虑如下等式：

K=kG [其中 K,G为Ep(a,b)上的点，k为小于n（n是点G的阶）的整数]

不难发现，给定k和G，根据加法法则，计算K很容易；但给定K和G，求k就相对困难了。

这就是椭圆曲线加密算法采用的难题。我们把点G称为基点（base point），k（k<n，n为基点G的阶）称为私有密钥（privte key），K称为公开密钥（public key)。

现在我们描述一个利用椭圆曲线进行加密通信的过程：

1、用户A选定一条椭圆曲线Ep(a,b)，并取椭圆曲线上一点，作为基点G。

2、用户A选择一个私有密钥k，并生成公开密钥K=kG。

3、用户A将Ep(a,b)和点K，G传给用户B。

4、用户B接到信息后，将待传输的明文编码到Ep(a,b)上一点M（编码方法很多，这里不作讨论），并产生一个随机整数r（r<n）。

5、用户B计算点C_1=M+rK；C_2=rG。

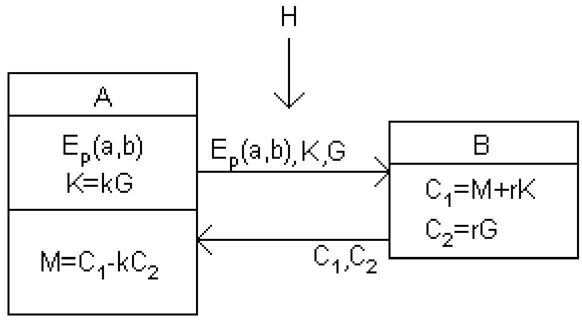
6、用户B将C_1、C_2传给用户A。

7、用户A接到信息后，计算C_1-kC_2，结果就是点M。因为

$C_1-kC_2=M+rK-k(rG)=M+rK-r(kG)=M$

再对点M进行解码就可以得到明文。

在这个加密通信中，如果有一个偷窥者H，他只能看到Ep(a,b)、K、G、C_1、C_2 而通过K、G 求k或通过C_2、G求r 都是相对困难的。因此，H无法得到A、B间传送的明文信息。



密码学中，描述一条Fp上的椭圆曲线，常用到六个参量：

T=(p,a,b,G,n,h)。

（p 、a 、b 用来确定一条椭圆曲线，
G为基点，
n为点G的阶，
h 是椭圆曲线上所有点的个数m与n相除的整数部分）

这几个参量取值的选择，直接影响了加密的安全性。参量值一般要求满足以下几个条件：

1、p 当然越大越安全，但越大，计算速度会变慢，200位左右可以满足一般安全要求；
2、$p \neq n \times h$；
3、$p^t \neq 1 \pmod n$，$1 \leq t < 20$；
4、$4a^3+27b^2 \neq 0 \pmod p$；
5、n 为素数；
6、$h \leq 4$。

七、椭圆曲线在软件注册保护的应用

我们知道将公开密钥算法作为软件注册算法的好处是Cracker很难通过跟踪验证算法得到注册机。下面，将简介一种利用Fp(a,b)椭圆曲线进行软件注册的方法。

软件作者按如下方法制作注册机（也可称为签名过程）

1、选择一条椭圆曲线Ep(a,b)，和基点G；
2、选择私有密钥k（k<n，n为G的阶），利用基点G计算公开密钥K=kG；
3、产生一个随机整数r（r<n），计算点R=rG；
4、将用户名和点R的坐标值x,y作为参数，计算SHA（Secure Hash Algorithm 安全散列算法，类似于MD5）值，即Hash=SHA(username,x,y)；
5、计算sn≡r - Hash * k (mod n)
6、将sn和Hash作为 用户名username的序列号

软件验证过程如下：（软件中存有椭圆曲线Ep(a,b)，和基点G，公开密钥K）

1、从用户输入的序列号中，提取sn以及Hash；
2、计算点R≡sn*G+Hash*K (mod p)，如果sn、Hash正确，其值等于软件作者签名过程中点R(x,y)的

坐标，因为

sn≡r-Hash*k （mod n）

所以

sn*G + Hash*K
=(r-Hash*k)*G+Hash*K
=rG-Hash*kG+Hash*K
=rG- Hash*K+ Hash*K
=rG=R ；

3、将用户名和点R的坐标值x,y作为参数，计算H=SHA(username,x,y)；

4、如果H=Hash 则注册成功。如果H≠Hash ，则注册失败(为什么？提示注意点R与Hash的关联性)。

简单对比一下两个过程：

作者签名用到了：椭圆曲线Ep(a,b)，基点G，私有密钥k，及随机数r。

软件验证用到了：椭圆曲线Ep(a,b)，基点G，公开密钥K。

Cracker要想制作注册机，只能通过软件中的Ep(a,b)，点G，公开密钥K ，并利用K=kG这个关系获得k后，才可以。而求k是很困难的。

练习：

下面也是一种常于软件保护的注册算法，请认真阅读，并试回答签名过程与验证过程都用到了那些参数，Cracker想制作注册机，应该如何做。

软件作者按如下方法制作注册机（也可称为签名过程）

1、选择一条椭圆曲线Ep(a,b)，和基点G；

2、选择私有密钥k（k<n），利用基点G计算公开密钥K=kG；

3、产生一个随机整数r（r<n），计算点R(x,y)=rG；

4、将用户名作为参数，计算Hash=SHA(username)；

5、计算 x’=x (mod n)

6、计算sn≡(Hash+x’*k)/r (mod n)

7、将sn和x’作为 用户名username的序列号

软件验证过程如下：(软件中存有椭圆曲线Ep(a,b)，和基点G，公开密钥K)

1、从用户输入的序列号中，提取sn以及x’；

2、将用户名作为参数，计算Hash=SHA(username)；

3、计算 R=(Hash*G+x’*K)/sn，如果sn、Hash正确,其值等于软件作者签名过程中点R(x,y)，因为

sn≡(Hash+x’*k)/r (mod n)

所以

(Hash*G+x’*K)/sn
=(Hash*G+x’*K)/[(Hash+x’*k)/r]
=(Hash*G+x’*K)/[(Hash*G+x’*k*G)/(rG)]
=rG*[(Hash*G+x’*K)/(Hash*G+x’*K)]
=rG=R (mod p)

4、v≡x (mod n)

5、如果v=x’ 则注册成功。如果v≠x’，则注册失败。

八、结语

历经半个多月断断续续的写作，这篇拙作终于算告一段落了。为写这篇文章，我查了大量的资料，但为了使文章更通俗易懂，我尽量避免涉及专业术语，F_2n域上的椭圆曲线本文也没有涉及。不过，一些名词描述的可能还不太精确，希望众读者对文章的问题，多多批评指正。我也仅仅把这篇文章作为初稿，我会不断修订他的。最后感谢看雪、Sunbird、CCG以及看雪论坛所有成员对我的支持，感谢一切帮助过我的人，没有你们的鼓励，这篇文章我是没有动力写完的，谢谢，谢谢大家！

2003-5-3 初稿，于看雪论坛
2004-7-11二稿，修正一张图片

<全文完>

主要参考文献

张禾瑞，《近世代数基础》，高等教育出版社，1978
闵嗣鹤 严士健，《初等数论》，高等教育出版社，1982
段云所，《网络信息安全》第三讲，北大计算机系
Michael Rosing，chapter5《Implementing Elliptic Curve Cryptography》，Softbound，1998
《SEC 1: Elliptic Curve Cryptography》，Certicom Corp.，2000
《IEEE P1363a / D9》，2001

┌──────┐ ▩▩
│\ ／│ ▩ ☆ ECC加密算法入门介绍 ★ ▩
│ \/ / │ ▩▩
│／\/ │ ▩ ☆版权所有 ZMWorm[CCG]，转载请保留完整性★ ▩
└──┴──┘ ▩▩